Révision des qualificatifs de l'imparfait pour l'information géographique

Giovanni Fusco, Andrea G. B. Tettamanzi

Chapitre III.3

Révision des qualificatifs de l'imparfait pour l'information géographique [1]

III.3.1 Introduction

L'analyse géographique est souvent confrontée avec l'acquisition progressive d'informations, permettant de revoir de façon itérative l'état de nos connaissances (inférées à partir des données disponibles et de nos connaissances préalables). Ce besoin est d'autant plus aigu dans la mesure où l'information géographique officielle, produite avec des protocoles certifiés (ceux de l'IGN, du BRGM, de l'INSEE, etc.) à des dates bien précises, doit être couplée avec d'autres types d'information, notamment l'information géographique volontaire (VGI), produite en continu et avec des imperfections bien plus marquées (information incomplète, imprécise, incertaine, voire contradictoire). Ce chapitre aborde les méthodologies de la révision de croyances d'une information imparfaite (*belief revision*), notamment la révision bayésienne (théorème de Bayes, règle de Jeffrey) et les alternatives dans les formalismes non probabilistes (règle de fusion de Dempster dans la théorie des évidences, conditionnement possibiliste dans la théorie des possibilités). Ce chapitre a ainsi un lien très fort avec le chapitre II.1, où les différentes théories de la représentation des objets avec imperfections sont présentées. La présente section montre comment ces théories peuvent être mobilisées, d'un point de vue opérationnel, pour donner une solution à la question de la révision des croyances sur l'information disponible. Les avantages et inconvénients respectifs seront également soulignés, pour parvenir à la conclusion que chaque approche méthodologique est

[1] Giovanni Fusco, Université Côte d'Azur, CNRS, ESPACE, et Andrea Tettamanzi, Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, I3S – celle-ci est une version préparée par les auteurs.

plus ou moins adaptée à différents contextes de connaissance de l'information spatiale.

Un petit exemple à but démonstratif nous accompagnera le long de cette section. Une ville dans un pays émergent vient d'être touchée par un violent séisme[2]. L'information géographique officielle disponible est souvent obsolète, voire inexistante dans plusieurs domaines. Des informations plus ou moins complètes et fiables remontent du terrain, par les biais des réseaux sociaux. Les autorités en charge de la gestion de la crise souhaiteraient organiser cette information dans un système d'information géographique pour gérer au mieux les premiers secours et mettre à jour de façon continue l'état de leurs connaissances sur la ville sinistrée.

Nous verrons comment décliner l'usage de la nouvelle information géographique dans cette gestion de crise. Nous ferons référence à certaines notions de base de l'ingénierie des connaissances (KE, *Knowledge Engineering*) qui ont été intégrées au fil du temps dans le domaine de la gestion de l'information spatiale. Un système d'information géographique peut en effet être conçu comme une formalisation spécifique d'une base de connaissances (nous verrons dans la suite quelles sont les limites de son formalisme). Certaines connaissances peuvent être appréhendées en tant qu'éléments de ce que l'ingénierie des connaissances désigne par le terme de *knowledge* : il s'agit de connaissances bien établies qui ne seront pas remises en discussion dans le cycle de vie du SIG, notamment tout ce qui relève de l'ontologie des objets géographiques (quelles représentations géométriques pour quels objets spatiaux, quelle topologie des objets, quelle structure des tables attributaires, quels identifiants, etc.). D'autres éléments de connaissance, notamment les valeurs renseignées dans les tables attributaires et les coordonnées définissant les objets spatiaux pourraient davantage relever de ce que l'ingénierie des connaissances désigne en tant que *beliefs* : il s'agit de « croyances », de connaissances provisoires, d'hypothèses qui pourraient être revues par les gestionnaires du système d'information. Dans ce qui suit, nous allons d'abord considérer que les éléments de cet ensemble de croyances ont tous des valeurs de vérité binaires (vrais / faux), ne laissant pas de place aux incertitudes. Nous verrons comment, même dans ce cas de figure, des opérations de révision peuvent produire des imperfections dans l'ensemble des croyances. Successivement, nous passerons au cas plus général où les clauses utilisent dès le départ des formalismes de la connaissance incertaine, et

[2]Le tremblement de terre ayant frappé Port-au-Prince (Haïti) en janvier 2010, avec une magnitude de 7,3 sur l'échelle de Richter, pourrait ne pas être trop éloigné de notre exemple fictif.

nous verrons comment les opérations de révision peuvent tirer parti de ces formalismes pour parvenir à des états révisés et cohérents de croyances incertaines.

III.3.2 Révision et mise à jour des croyances en ingénierie des connaissances

En ingénierie des connaissances, on opère une première distinction entre la mise à jour des croyances (*belief update*) et la révision des croyances (*belief revision*). La première se réfère à la formulation de nouvelles croyances pour décrire un nouvel état du monde physique. La nouvelle information ne remplace pas l'ancienne à strictement parler, car elle se réfère à une description d'un nouveau domaine spatio-temporel. La seconde est en revanche une prise en considération de nouveaux éléments d'information (normalement considérés plus fiables) pour modifier nos croyances sur un seul et même état du monde.

Imaginons, par exemple, que la ville frappée par le séisme dispose de deux dispensaires. Nous en connaissons les coordonnées, ce qui nous permet de les représenter au moins comme des points dans notre SIG. Une colonne attributaire devra nous renseigner sur l'état de fonctionnement de chaque dispensaire, cette variable pourrait par exemple prendre une des deux modalités *{en service ; hors service}*. Dans une première version du SIG, modélisant l'état de la ville avant le séisme, les deux dispensaires sont en état de service. Savoir que, après le séisme, le dispensaire n° 1 a été détruit, revient à effectuer une mise à jour des croyances pour produire une nouvelle version du SIG. En revanche, on peut envisager que le SIG décrivant la ville après le séisme ait par défaut considéré que les deux dispensaires étaient en état de service, car construits en béton armé censé résister à la magnitude enregistrée du séisme. Un témoignage provenant du terrain nous informe que le dispensaire n° 1 a été détruit et est donc hors service. Nous devons ici effectuer une révision de croyances dans le SIG de l'après-séisme, car un élément d'information plus récent (et dans ce cas plus fiable) vient modifier notre croyance dans la description de l'objet spatial à la même date.

III.3.3 Les limites des SIG pour représenter un ensemble de croyances

Nous allons maintenant voir quelles sont les limitations d'un SIG pour modéliser un ensemble de croyances sur un état du monde. Comme toute base de données, un SIG est constitué d'une structure en classes et instances couplant, à la différence des bases de données non géographiques, une double description, géométrique et sémantique, des objets spatiaux (voir chapitre II.2).

Or, une base de données de ce type, une fois instanciée, pourrait être vue comme un ensemble de propositions sur les objets spatiaux (chaque instance du SIG en est une, par exemple le dispensaire n°1 aux coordonnées x1 et y1 est en état de service), permettant un raisonnement sur la base de la logique propositionnelle, ainsi qu'un ensemble de propriétés des objets (par exemple, chaque dispensaire possède une date d'entrée en service) , définies par la structure de la géométrie et des attributs sémantiques de chaque classe d'objets et permettant un raisonnement sur la base d'une logique de premier ordre.

En réalité, cette structure en n-uplets, caractéristique de toute base de données classiques, est apte seulement à représenter des informations correspondant à des clauses conjonctives (ex. le dispensaire n°1 aux coordonnées x1 et y1 est en état de service ET le dispensaire n°2 aux coordonnées x2 et y2 est en état de service). Nous ne pouvons ainsi pas représenter correctement dans un SIG des informations de type disjonctif. Imaginons, par exemple, qu'un tweet depuis la ville ravagée par le séisme nous informe que « le dispensaire a été détruit », sans nous spécifier s'il s'agit du dispensaire n°1 ou 2 (le citoyen envoyant le message pourrait ne pas être au courant de l'existence de deux dispensaires). Concernant l'état de service des dispensaires, modélisable par une variable binaire, cette information correspond à la clause *(¬n°1 V ¬n°2)*. Nous pourrions penser renseigner le champ *état de fonctionnement* pour chacun des deux dispensaires par la modalité *en service V hors service*. Or, cette représentation ne correspond pas à la clause disjonctive *(¬n°1 V ¬n°2)*, car elle n'exclut pas que les deux dispensaires puissent être les deux encore en état de service.

De ce point de vue, donc, un SIG n'est pas apte à représenter tout ensemble de croyances, mais seulement des ensembles particuliers de croyances, contenant uniquement des clauses conjonctives. Pour représenter de façon plus générale un ensemble de croyances, nous avons besoin de coupler au SIG l'ensemble des autres clauses (par exemple disjonctives) en utilisant un langage de représentation moins contraignant, comme par exemple celui des logiques de description (LD). De surcroit, ces langages formels plus expressifs permettent l'utilisation d'un raisonneur automatique pour effectuer la fermeture logique de l'ensemble de croyances (c'est-à-dire l'inférence de toutes les déductions possibles à partir des clauses incluses dans l'ensemble) et assurer la cohérence de l'ensemble (c'est-à-dire l'absence de contradictions entre les clauses). Des systèmes hybrides couplant SIG, clauses en LD non modélisables par SIG et raisonneur ont ainsi été proposés [WES 03, WES 09].

III.3.4 La révision dans un ensemble de croyances binaires

Considérons maintenant la modélisation d’un ensemble de croyances *K* binaires (donc des propositions pouvant seulement être crues vraies ou fausses) par un SIG, avec les limites que l’on vient de voir, ou bien par un système hybride comprenant un SIG. Lorsque *K* se réfère à un même état du monde il peut, de façon générale, faire l’objet des opérations suivantes [GÄR 92] :

– Expansion : rajout d’une ou plusieurs clauses aux clauses existantes, sans vérifier la cohérence du nouvel ensemble (y compris en ce qui concerne les déductions logiques des clauses renseignées). Un SIG pourrait par exemple être structuré en deux couches d’information polygonales : la première contient l’emprise au sol des bâtiments ; la seconde les types d’occupation du sol urbain (par ex. tissu urbain continu, tissu urbain discontinu, espace naturel ou agricole mité par du bâti diffus, etc.). Rajouter des nouveaux bâtiments dans la première couche est une expansion de *K*, qui pourrait encore contenir des incohérences logiques (le rajout de bâti pourrait nécessiter d’autres opérations sur la couche des types d’occupation du sol, par exemple si les nouveaux bâtiments créent une nouvelle zone de bâti diffus).

– Contraction : élimination d’une ou plusieurs clauses à l’ensemble (élimination d’instances, par exemple), sans vérifier la cohérence du nouvel ensemble.

– Consolidation : opération de restauration de la cohérence d’un ensemble de croyances (résolution des incohérences logiques).

– Révision : rajout de nouvelles croyances tout en assurant la cohérence logique.

– Fusion : assemblage et consolidation de différents ensembles de croyances, pour obtenir un nouvel ensemble logiquement cohérent.

La révision peut être vue comme un cas particulier de fusion, dans laquelle les nouvelles croyances ont une priorité sur les anciennes, car on considère qu’elles sont plus fiables. Dans un ensemble de croyances binaires, la révision peut alors revenir au simple remplacement de vieilles croyances par des nouvelles croyances, tout en éliminant les déductions faites à partir des vieilles croyances et en rajoutant les déductions qui découlent des nouvelles.

En ingénierie des connaissances, la cohérence de l’opération de révision est assurée par le respect des six postulats de base du cadre de référence AGM, qui prend son nom des trois auteurs qui l’ont formalisé [ALC 85]. Lorsqu’une nouvelle croyance *P* est utilisée pour effectuer la révision d’un ensemble de croyances *K* (l’ensemble suite à révision est normalement noté $K*P$), le cadre AGM assure plus particulièrement la fermeture logique de la révision (toutes les conséquences logiques de l'ensemble révisé doivent être inclues dans l'ensemble de croyances), son succès (*P* doit appartenir au nouvel ensemble révisé), son inclusion (l'ensemble révisé est inclus dans l'ensemble produit par une expansion), la vacuité (si ¬*P* n'appartenait pas à *K*, alors expansion et révision sont équivalentes), le non rajout d'incohérences (l'ensemble révisé sera incohérent seulement si *K* ou *P* étaient déjà incohérents) et l'extensibilité (si deux nouvelles croyances *P* et *Q* sont équivalentes d'un point de vue logique, il est équivalent de réviser *K* par l'une ou par l'autre). Seules les révisions qui respectent ces six postulats du cadre AGM sont considérées rationnelles. Deux postulats ultérieurs, concernant les révisions par des croyances composées, sont différemment acceptés et implémentés dans la littérature.

Imaginons d'effectuer la révision de notre ensemble de croyances *K* sur l'état de la ville suite au séisme, suivant un cadre AGM. Comme nous avons dit, *K* a été dans un premier moment instancié avec les deux dispensaires en état de service. La clause disjonctive *P (¬n°1 V ¬n°2)* avec laquelle nous souhaitons revoir les croyances dans *K* peut être considérée comme un premier cas d'information imparfaite (elle peut être interprétée à la fois comme information incomplète ou comme information imprécise). La révision de *K* par *P* entraîne une multiplicité de mondes possibles, tous également compatibles avec le nouvel ensemble de croyances *K*P*.

III.3.5 Le cas des croyances incertaines

Le chapitre II.1 a montré les différents formalismes pour représenter des informations imparfaites sur les objets géographiques. Plus particulièrement, en ce qui concerne l'incertitude de l'information géographique, qualifier l'imparfait revient à assigner des valeurs de plausibilité (concept ici appréhendé dans le sens le plus large du terme) aux différents mondes possibles. Il s'agit, en cela, d'un dépassement de la logique binaire, car une clause peut ne plus être seulement vraie ou fausse, mais être caractérisée par un degré intermédiaire de plausibilité.

Pour revenir à notre exemple, imaginons de devoir renseigner l'état fonctionnel d'un pont après le séisme ravageur. Dans un ensemble de croyances binaires, la table attributaire ne peut qu'être renseignée avec les valeurs *{oui, non}* et éventuellement avec *oui V non*, qui équivaut à l'état d'ignorance totale et donc à une case vide (non renseignée).

ID	type	Utilisable
1	pont	

Tableau III.3.1

Dans une représentation probabiliste de l'information, la table attributaire possède un champs *p(utilisable)* quantifiant la plausibilité du monde possible où le pont est utilisable. Le champs dual *p(inutilisable)* est superflu car dans le cas d'une variable binaire, les axiomes de Kolmogorov nous assurent de pouvoir obtenir la probabilité de la seconde modalité comme complément à 1 de la probabilité de la première modalité. Imaginons ainsi que le gestionnaire du SIG post-séisme souhaite renseigner la plausibilité que le pont n°1 soit utilisable par le fait que la littérature montre que les ponts ayant les mêmes caractéristiques structurelles soumis à un séisme de telle magnitude ont normalement une probabilité 0,6 de résister et continuer à être utilisables. La table attributaire aura ainsi l'allure suivante :

ID	type	p (utilisable)	p (inutilisable)
1	pont	0,6	0,4

Tableau III.3.2

La modélisation par la théorie des évidences de Dempster-Shafer (voir section II.1.3.2) permet de rajouter de façon plus spécifique ce qui relève d'une incertitude intrinsèque, liée à la variabilité de l'évènement (les ponts ayant les mêmes caractéristiques, soumis à ce type de séisme peuvent continuer à être utilisables ou non avec un rapport de chances de 3:2) et ce qui relève de l'incertitude épistémique du modélisateur (il n'est pas certain que le modèle statistique disponible soit adapté à décrire ce pont car, par exemple, son état de vétusté n'est pas connu ou la situation micro-séismique pourrait être beaucoup plus importante que la résistance de la structure).

Le modélisateur attribuera alors une masse de croyance aux différents sous-ensembles de mondes possibles, par exemple la masse 0,5 au fait que le modèle statistique ne s'applique pas au cas d'étude, et des masses 0,3 et 0,2 aux deux modalités *utilisable* et *non utilisable*, suivant le rapport de chances du modèle statistique. Suivant la théorie expliquée dans le chapitre II.1, ces masses de croyance (dont la somme, comme dans le cas des probabilités, est toujours unitaire) sont utilisées pour calculer une croyance et une plausibilité pour les différents évènements (comme dans le Tableau III.3.3). Les termes de croyance (*belief*) et plausibilité (*plausibility*) sont ici utilisés dans le sens très spécifique de la théorie de Dempster-Shafer [SHA 76] et correspondent à des bornes inférieure et supérieure, corroborées par les évidences disponibles, de probabilités mal connues, de chaque évènement.

Evènement	masse	croyance	plausibilité
Pont utilisable	0,3	0,3	0,8

Pont inutilisable	0,2	0,2	0,7
Pont utilisable ou inutilisable	0,5	1	1

Tableau III.3.3

La table attributaire pour le pont en question aura l’allure suivante :

ID	type	bel (utilisable)	pl (utilisable)	bel (inutilisable)	pl (inutilisable)
1	pont	0,3	0,8	0,2	0,7

Tableau III.3.4

Comme pour le cas probabiliste, les champs relatifs à la seconde modalité d’une variable binaire sont superflus, bel(inutilisable) et pl(inutilisable) pouvant se calculer à partir de la croyance et de la plausibilité de la première modalité selon les relations :

$$Bel\ (\neg A) = 1 - Pl(A) \tag{1a}$$

$$Pl\ (\neg A) = 1 - Bel(A) \tag{1b}$$

Tout comme la théorie des évidences, la théorie des possibilités permet de modéliser les croyances de l’agent connaissant par un couple de mesures, ici la nécessité et la possibilité, constituant les bornes inférieure et supérieure de probabilités mal connues (voir section II.1.3.3). En effet, les deux théories peuvent être vues comme des cas particuliers de la théorie des probabilités imprécises [WAL 91], qui modélise la méconnaissance d’une distribution de probabilité de la manière la plus générale. Comme dans la théorie des probabilités, en revanche, l’élicitation de la connaissance experte en théorie des possibilités se fait seulement sur les évènements élémentaires et pas sur l’ensemble des parties des mondes possibles. La théorie des possibilités, surtout dans sa version qualitative, se prête particulièrement bien à représenter des connaissances incertaines évaluées seulement en ordre de plausibilité. La mesure de possibilité Π mesure ici le degré de non-surprise d’un expert par rapport à un évènement élémentaire : Π=1 correspond à un évènement complètement normal et donc nullement surprenant, Π=0 à un évènement impossible, Π=0,8 pouvant caractériser un évènement relativement ordinaire donc peu surprenant, Π=0,2 un évènement presque impossible et donc très surprenant. Ce qui compte dans cette évaluation qualitative n’est pas la valeur précise de la mesure de possibilité mais l’ordre établi par ces valeurs parmi les différentes modalités d’une variable. La mesure de nécessité N est en revanche un degré de certitude dans l’information, N=1 correspondant à une certitude absolue, N=0 à la totale absence de certitude. Des informations ayant N>0 sont considérées vraies, mais pas complètement certaines (sauf si N=1).

La table attributaire ci-dessous considère ainsi l'utilisabilité du pont après le séisme comme étant tout à fait normale, étant données ses caractéristiques structurelles et la magnitude du séisme. Il n'est pas considéré normal, mais pas très surprenant non plus, que le pont soit inutilisable (Π=0,6). Ces évaluations pourraient correspondre à une élicitation qualitative qui n'est pas forcement corroborée par de l'information statistique.

ID	type	Π (utilisable)	N (utilisable)	Π (inutilisable)	N (inutilisable)
1	pont	1	0,4	0,6	0

Tableau III.3.5

Comme pour la modélisation en théorie des évidences, les champs relatifs à la seconde modalité d'une variable binaire sont superflus, Π(inutilisable) et N(inutilisable) pouvant se calculer à partir de la possibilité et de la nécessité de la première modalité selon les relations :

$$\Pi\ (\neg A) = 1 - N(A) \tag{2a}$$

$$N\ (\neg A) = 1 - \Pi(A) \tag{2b}$$

La révision des qualificatifs de l'imparfait, dans le cas d'informations incertaines, revient à revoir les valeurs des probabilités, des croyances/plausibilités ou des possibilités/nécessités en considération de nouvelles informations parvenant au gestionnaire de l'information géographique, tout en respectant le cadre formel AGM. Cette révision prend la forme calculatoire d'un conditionnement, car il s'agit de calculer des nouvelles valeurs de probabilité/plausibilité/possibilité conditionnellement à la connaissance des nouveaux éléments d'information. Le conditionnement peut en effet être appréhendé comme cas particulier de la révision des croyances, traditionnellement limité à la révision de qualificatifs incertains en présence de nouvelles informations certaines, mais successivement élargi au cas où les nouvelles informations seraient à leur tour incertaines.

III.3.6 Le conditionnement probabiliste bayésien

Le conditionnement probabiliste se fonde sur le théorème de Bayes, permettant la révision d'une probabilité subjective conditionnellement à l'observation d'un élément d'évidence empirique (ici la nouvelle information). Le théorème de Bayes se fonde sur la relation entre la probabilité conjointe de deux évènements (*A* et *B*) et la probabilité conditionnelle d'un évènement par rapport à l'autre :

$$p(A \cap B) = p(B|A)\, p(A) = p\,(A|B)\, p\,(B) \tag{3}$$

Dans l'opération de conditionnement, nous donnons normalement un rôle asymétrique aux différents éléments de connaissance : il existe une distribution de probabilité *a priori* $p(H_i)$ sur des hypothèses H_i (les modalités d'une variable H qui est donc incertaine) et nous obtenons une information certaine E (une évidence) pour laquelle $p(E)=1$ et qui va entrainer une révision de nos croyances $p(H_i)$. Le théorème de Bayes prend alors la forme suivante :

$$p(H_i \mid E) = \frac{p(E \mid H_i)p(H_i)}{\sum_i p(E \mid H_i)p(H_i)}. \tag{4}$$

où $p(H_i|E)$ est la distribution de probabilité *a posteriori* des hypothèses, c'est-à-dire suite à révision, en connaissant E. Des éléments fondamentaux pour le calcul du conditionnement bayésien sont les vraisemblances $p(E|H_i)$ qui quantifient les probabilités avec lesquelles les différentes hypothèses auraient généré l'évidence E (elles ne somment pas 1 car il s'agit chaque fois d'un modèle probabiliste différent). Or, comme le note Shafer [SHA 81] la connaissance de ces vraisemblances n'est pas toujours assurée dans des cas concrets et elle limite l'utilisation de modélisations probabilistes bayésiennes bien plus que les approximations des probabilités *a priori*, qui sont en tous cas vouées à être revues au fur et à mesure que de la nouvelle information se rend disponible.

Le théorème de Bayes, en tant que règle de conditionnement probabiliste, peut être généralisé au cas où l'évidence E ne serait pas certaine, mais il y aurait une distribution de probabilité q sur une partition relativement grossière de l'univers du possible de E. La probabilité a posteriori à estimer est maintenant $q(H_i|E)$ et la règle de Jeffrey généralise le théorème de Bayes comme suit :

$$q(H_i \mid E) = \sum_j q_j p(H_i \mid E_j) \tag{5}$$

où chaque $p(H_i|E_j)$ est calculé selon (4).

Par la règle de Jeffrey, l'asymétrie entre distribution de probabilité *a priori* et évidence certaine tombe, car l'évidence aussi est affectée d'incertitude.

Revenons à notre exemple. Dans l'évaluation de l'état de fonctionnement du pont, pour lequel nous avons déjà formulé nos probabilités *a priori* (Tableau III.3.2), le témoignage, considéré fiable, de la part d'un citoyen sur le terrain nous indique que le pont serait inutilisable. Voyons comment le conditionnement bayésien peut être utilisé pour la révision des probabilités *a priori*. Nous pouvons utiliser le théorème de Bayes (4). Les éléments essentiels pour le calcul sont les deux vraisemblances $p(E|inutilisable)$ et $p(E|utilisable)$. L'évidence est le témoignage de la part d'un observateur non expert que le pont serait inutilisable. Nous devons donc avoir un modèle statistique permettant de quantifier avec quelle probabilité un pont inutilisable à la suite d'un tremblement de terre serait perçu comme étant inutilisable par un non expert (comme notre informateur). Un second modèle doit nous fournir la probabilité avec laquelle, après un séisme, un pont utilisable, suite à quelques altérations visuelles non remettant en cause son état de fonctionnement (fissures superficielles, endommagements mineurs, etc.), serait perçu comme étant inutilisable par un non expert. Supposons que ces valeurs soient de 0,9 et 0,2 respectivement (comme anticipé, la somme des vraisemblances n'est pas unitaire, car il s'agit de probabilités qui proviennent de modèles différents). Nous pouvons ainsi calculer :

$$p(inutilisable \mid E) = \frac{0,9 \times 0,4}{0,9 \times 0,4 + 0,2 \times 0,6} = 0,75.$$

La nouvelle table attributaire sera alors :

ID	type	p (utilisable)	p (inutilisable)
1	pont	0,25	0,75

Tableau III.3.6

Notre croyance probabiliste dans le fait que le pont soit inutilisable est donc passée, suite à la prise en compte du témoignage, de 0,4 à 0,75. Par le biais du conditionnement probabiliste, l'évidence E a permis une révision de nos croyances qui n'est pas une simple substitution d'une ancienne croyance par une nouvelle.

Un des intérêts du conditionnement bayésien est sa récursivité. Imaginons, par exemple, qu'un nouveau témoignage E_2 nous parvienne, faisant état du fait que le pont serait utilisable. L'actuelle distribution de probabilités *a priori* est maintenant 0,25 pour l'utilisabilité et 0,75 pour la non utilisabilité du pont. Les vraisemblances que nous avons déjà utilisées nous permettent également de calculer $p(E_2|utilisable)=0,8$ et $p(E_2|inutilisable)=0,1$. Nous pouvons ainsi calculer :

$$p(utilisable \mid E) = \frac{0,80 \times 0,25}{0,8 \times 0,25 + 0,1 \times 0,75} = 0,727.$$

Suite à la nouvelle révision, la table attributaire du pont deviendra alors :

ID	type	p (utilisable)	p (inutilisable)
1	pont	0,727	0,273

Tableau III.3.7

L'ordre des deux révisions n'a pas d'impact sur le résultat final. L'asymétrie dans les vraisemblances (il est légèrement plus probable que l'on se trompe en considérant comme inutilisable un pont qui, en réalité, est encore fonctionnellement intègre, plutôt que l'on considère comme utilisable à tort un pont qui est gravement endommagé) fait que la révision des probabilités *a priori* par les deux témoignages contradictoires renforce légèrement la croyance dans le fait que le pont soit utilisable (elle passe de 0.6 à 0.727). La précision du calcul probabiliste est à la fois le point fort et la limite de ce formalisme. Dans la mesure où les probabilités *a priori* et les vraisemblances ne seraient pas obtenues d'un calcul statistique mais d'une élicitation d'experts, ces valeurs, souvent approximatives, seraient alors utilisées dans un calcul quantitatif fallacieusement précis.

Le conditionnement bayésien bénéficie en revanche de la possibilité d'une mathématisation très sophistiquée. Si les fonctions de vraisemblance sont modélisables par une distribution binomiale (variable binaire) ou multinomiale (variable à n-valeurs), alors la théorie des distributions *a priori* conjuguées [RAI 61], nous permet d'utiliser la distribution Beta ou la distribution de Dirichelet, respectivement. Dans ces fonctions, l'expérience équivalente des distributions *a priori* (qui est une quantification de l'expérience accumulée par l'expert pour formuler ces probabilités), ainsi que le nombre d'observations venant corroborer chaque évidence rentrée dans le modèle, sont très facilement intégrés dans le calcul en tant qu'hyperparamètres [BOL 07]. Nous pouvons alors effectuer des révisions de croyance très sophistiquées du type : étant donnée une distribution *a priori*, équivalent à l'expérience de 50 observations, pour une probabilité de 0,4 que le pont soit inutilisable après un tel séisme, comment effectuer une révision de cette probabilité étant donné que j'ai 10 témoignages que le pont serait inutilisable et 2 témoignages qu'il soit utilisable ?

III.3.7 La révision dans la théorie des évidences

Comme le souligne Shafer [SHA 81], tant la théorie des probabilités bayésiennes que la théorie des évidences doivent être conçues comme deux modèles construits pour répondre à des besoins de représentation dans des contextes de connaissances spécifiques. La théorie des probabilités bayésiennes le fait en comparant les évènements à modéliser avec des exemples canoniques aux probabilités et aux fonctions de vraisemblance connues. La théorie des évidences le fait en comparant les évènements à modéliser avec des exemples canoniques qui sont des messages ayant des probabilités connues de corroborer tel ou tel évènement. Rien de plus naturel que de considérer alors que la nouvelle information sur la ville sinistrée par le séisme, soit un message qui peut être analysé, comme une image aérienne du pont. L'image est, hélas, de mauvaise qualité et les experts pensent y trouver des éléments permettant d'étayer la non utilisabilité du pont, mais il est tout aussi possible que ces éléments soient des artefacts de la mauvaise prise de vue. On peut donc distribuer de façon équitable la masse de probabilité entre un message étayant la non utilisabilité du pont et un autre qui serait encore compatible avec les deux évènements indépendants. Selon la théorie des évidences, l'image aérienne aurait le contenu informationnel suivant :

Evènement	masse	croyance	plausibilité
Pont utilisable	0	0	0,5
Pont inutilisable	0,5	0,5	1
Pont utilisable ou inutilisable	0,5	1	1

Tableau III.3.8

Conditionner les croyances et les plausibilités du Tableau III.3.3 avec cette nouvelle information revient à fusionner d'abord les masses de croyance subjacentes avec celles issues de l'image aérienne. Cette fusion s'effectue avec la règle de combinaison de Dempster [SHA 76]. Le conditionnement en théorie des évidences est ainsi conçu dès le départ pour le cas où les évidences seraient incertaines. Pour un évènement A, étant données deux distributions de masses de croyances $m_1(A)$ et $m_2(A)$, la fusion des masses de croyances $m_{1,2}(A)$ est donnée par :

$$m_{1,2}(A) = \frac{1}{1-K} \sum_{B \cap C = A \neq \emptyset} m_1(B) m_2(C) \tag{6}$$

où

$$K = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) m_2(C). \tag{7}$$

Dans notre exemple, K = 0,3 x 0,5 = 0,15. Il s'agit du produit de la masse de croyance 0,3 de la première distribution pour le fait que le pont soit utilisable et de la masse de 0,5 de la seconde pour le fait que le pont soit inutilisable. Le facteur de normalisation vaut alors 1,176.

K est une mesure du niveau de conflit entre les deux distributions de masses. La règle de combinaison de Dempster revient à calculer toutes les combinaisons d'évidences corroborant un évènement donné dans les deux distributions de masse et à normaliser ensuite les masses résultantes sur les croyances communes aux deux distributions, c'est-à-dire en ignorant les conflits entre elles.

Pour la nouvelle masse à attribuer à l'évènement que le pont ne soit pas utilisable, nous avons ainsi :

$$m_{1,2}(\text{inutilisable}) = 1{,}176 \times (0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}5) = 0{,}529$$

Après tous les calculs, on obtient la nouvelle table issue de la fusion :

Evènement	masse	croyance	plausibilité
Pont utilisable	0,177	0,176	0,471
Pont inutilisable	0,529	0,529	0,823
Pont utilisable ou inutilisable	0,294	1	1

Tableau III.3.9

On constate donc que l'ignorance, liée à la masse attribuée au fait que le pont puisse être soit utilisable soit inutilisable, a diminué considérablement : les deux distributions de masse attribuaient une valeur 0.5 à cet évènement, mais la nouvelle distribution suite à leur fusion y attribue une masse de seulement 0.294. Corrélativement, les écarts entre les plausibilités et les croyances des deux évènements élémentaires se sont réduits, passant de 0.5 à environ 0.3. Bien évidemment, c'est l'évènement élémentaire pont inutilisable qui augmente sa plausibilité et sa croyance par rapport au Tableau III.3.3.

À la base, le but de l'agrégation d'informations est de fournir un sommaire sensé et cohérent d'un corpus de données, qu'elles viennent d'une ou plusieurs sources. Une règle de combinaison est un type spécial d'opérateur d'agrégation qui traite des données produites par des sources multiples. La règle de combinaison de Dempster se fonde sur l'hypothèse que ces sources sont indépendantes et que leur jugement est fiable. Tel serait le cas si, par exemple, les sources étaient un comité d'experts indépendants, qui peuvent exprimer des points de vue différents mais complémentaires, tous fondés sur une même réalité objective. Dans ce cas, souligner les points d'accord entre les sources et ignorer toute évidence contradictoire est légitime. C'est l'équivalent de faire une conjonction logique des opinions des sources. Les experts ont tous raison, même si leurs propos ne sont pas identiques : tout au plus, pris singulièrement, ils ne sont pas assez précis. Dans le cas opposé, lorsqu'on pense qu'il y a une source fiable et que les autres ne le sont pas, l'opération logique que l'on est légitimés à appliquer est la disjonction logique (une des sources dit le vrai, mais on ne sait pas laquelle). Entre la conjonction et la disjonction il y a un continuum d'opérateurs de combinaison compensatoires. On se rend compte que la règle de Dempster occupe un extrême de ce continuum.

La non prise en compte du niveau de conflit entre les deux distributions de masses, alors que ce niveau est important, a fait l'objet de critiques sérieuses [ZAD 86, YAG 87]. Effectivement, un grand nombre de règles de combinaison alternatives, dont certaines paramétriques, ont été proposées en littérature (pour un survol de quelques-unes, voir [SEN 02]).

III.3.8 Le conditionnement possibiliste

Comme pour la théorie des probabilités, le conditionnement possibiliste avec une évidence certaine découle de la relation entre possibilités conjointes et conditionnelles de deux évènements :

$$\Pi(A \cap B) = \Pi\ (B|A) * \Pi\ (A) \tag{8}$$

où * correspond à *min* en possibilités qualitatives subjectives et au produit en possibilités quantitatives, issues de calculs statistiques. Or, dans le cas de l'opérateur *min*, l'équation (8) n'a pas de solution unique. On choisit alors la solution moins spécifique, c'est-à-dire la solution avec le plus grand degré de possibilité qui respecte la contrainte de l'équation (8). La distribution de possibilité sous-jacente à la mesure de possibilité conditionnelle Π (B|A) est [DUB 97] :

$$\pi(\omega \mid A) = \begin{cases} 1 & \text{if } \pi(\omega) = \Pi(A) > 0,\ \omega \in A, \\ 0 & \text{if } \omega \notin A, \\ \pi(\omega) & \text{if } \pi(\omega) < \Pi(A),\ \omega \in A. \end{cases} \tag{9}$$

La possibilité d'un monde possible ω conditionnellement à la connaissance de l'évènement A est donc :

– totale (donc nullement surprenante) si ω est inclus dans A et sa possibilité *a priori* était aussi grande que la possibilité *a priori* de A ;

– nulle si ω est incompatible avec A ;

– elle reste inchangée si ω est inclus dans A mais avait une possibilité *a priori* inférieure à celle de A.

Cela a pour conséquence que Π (B|A) = $\Pi(A\cap B)$ si $\Pi(A\cap B) < \Pi$ (A), et Π (B|A) = 1 si $\Pi(A\cap B) = \Pi$ (A) > 0.

Pour les possibilités quantitatives, où l'opérateur * correspond au produit, on peut calculer :

$$\Pi(B|A)=\frac{\Pi(A\cap B)}{\Pi(A)} \tag{10}$$

Cette relation vaut quel que soit *B*, à condition que $\Pi(A) > 0$, car la valeur de *A* peut être éventuellement très surprenante, mais elle ne sera pas impossible (l'évidence vient en effet de se réaliser). Dubois et Prade [DUB 97] remarquent comme l'équation (10) correspond au conditionnement de la règle de combinaison de Dempster spécifié pour des mesures de possibilité.

La distribution de possibilités *a posteriori* correspondant à (10) est :

$$\pi(\omega \mid A) = \begin{cases} \frac{\pi(\omega)}{\Pi(\omega)} & \text{if } \omega \in A, \\ 0 & \text{if } \omega \notin A. \end{cases} \tag{11}$$

Les mêmes auteurs [DUB 97] démontrent également que les conditionnements possibilistes des équations (9) et (11) respectent les postulats AGM et peuvent ainsi formellement être appréhendés comme des révisions de croyances rationnelles au sens AGM.

Même le conditionnement possibiliste peut être généralisé au cas d'évidences incertaines pour obtenir l'équivalent du conditionnement probabiliste de la règle de Jeffrey [DUB 97]. Si A est une variable binaire, nous avons une évidence incertaine pour l'évènement A, ayant mesure de nécessité $N(A)=\alpha$, ce qui correspond à dire que dans la mesure de possibilité *a posteriori* Π', $\Pi'(A)=1$ et $\Pi'(\neg A)=1- \alpha$. N(A) est le degré de certitude de l'évènement A. Dans ce cas :

$$\pi(\omega \mid (A, \alpha))= \max (\pi(\omega \mid A), (1- \alpha) * \pi(\omega \mid \neg A)) \tag{12}$$

où * est le min en possibilités qualitatives et le produit en possibilités quantitatives et $\pi(\omega \mid A)$ est calculé selon (9) ou (11), respectivement.

Dans le cas plus général d'une variable à modalités multiples, l'incertitude sur les évidences s'exprime par une série de mesures de possibilités $\Pi(A_i)=\lambda_i$ avec $\max(\lambda_i)=1$. L'équivalent possibiliste de la règle de Jeffrey est alors :

$$\pi(\omega \mid \{(A_i, \lambda_i)\}) = \max_i (\lambda_i * \pi(\omega \mid A_i)) \quad (13)$$

On notera ainsi que la généralisation du conditionnement pour les variables à modalités multiples préfère utiliser les mesures de possibilité $\lambda_{i,}$ au lieu de la mesure de nécessité α employée pour le cas binaire, λ_i ayant le même rôle dans (13) que $1-\alpha$ dans (12).

Nous allons ainsi utiliser l'équation (12) pour la révision des croyances possibilistes du Tableau III.3.5 sur l'état de fonctionnement du pont. La théorie des possibilités qualitatives nous permet en effet d'évaluer qualitativement la plausibilité de son utilisabilité en l'absence d'informations statistiques (les vraisemblances) en demandant aux sources le degré de certitude qu'ils ont dans leur information. Imaginons, par exemple, que l'informateur ayant observé le pont après le séisme, nous dise à la fois que, selon lui, le pont est inutilisable et qu'il est relativement certain de cette affirmation, ce qui pourrait correspondre à une mesure de nécessité α=0,6. Nous pouvons ainsi calculer :

Π(utilisable | (inutilisable, 0,6)) =
max (π(utilisable | inutilisable), min(0,4 , π(utilisable | utilisable)) = 0,4

Π(inutilisable | (inutilisable, 0,6)) =
max (π(inutilisable | inutilisable), min(0,4 , π(inutilisable | utilisable)) = 1

La révision des croyances suite au conditionnement nous amène maintenant à considérer la non utilisabilité du pont comme complètement plausible et de donner un certain degré de surprise au fait qu'il soit utilisable, ce qui est un renversement des croyances *a priori* du Tableau III.3.5. On notera que si l'on avait obtenu n fois la même évidence avec la même certitude α, le résultat aurait été toujours le même.

Imaginons maintenant, comme dans l'exemple probabiliste, qu'une seconde source nous informe que le pont serait utilisable avec un degré de certitude α=0,8. En considérant que la distribution *a priori* est maintenant Π(utilisable)=0,4 et Π(inutilisable)=1, l'application itérée de l'équation (12) nous donne :

Π(utilisable | (utilisable, 0,8)) =
max (π(utilisable | utilisable), min(0,2 , π(utilisable | inutilisable)) = 1

Π(inutilisable │ (utilisable, 0,8)) =
max (π(inutilisable │ utilisable), min(0,2 , π(inutilisable │ inutilisable)) = 0,2

L'application itérée de (12) dans un cadre qualitatif semble donc produire la substitution d'une croyance avec une autre, plus qu'un conditionnement sophistiqué des valeurs. Le problème de notre petit exemple est que la variable est binaire et que chaque observation, même si elle n'est pas complètement certaine, rend surprenante la modalité non observée.

Pour pouvoir pleinement apprécier la capacité du conditionnement possibiliste à combiner les croyances *a priori* avec les évidences incertaines, nous avons besoin d'un exemple à peine plus complexe, et éventuellement à introduire des possibilités quantitatives. Dans notre SIG après-séisme, nous souhaiterions renseigner l'état fonctionnel du pont par un modèle un peu plus détaillé : un pont en état de fonctionnement pourrait être en parfait état de fonctionnement (ce qui admettrait de le solliciter jusqu'à sa charge maximale), ou bien en état de fonctionnement réduit (nous obligeant à limiter les sollicitations lors de son usage) ; un pont qui n'est plus en état de fonctionner pourrait à son tour menacer de s'écrouler (ce qui nous obligerait à établir un périmètre de sécurité autour) ou être non utilisable sans menace d'effondrement (on interdirait alors seulement son usage). L'observateur sur le terrain n'est pas capable d'effectuer ces distinctions et continuera à nous renseigner sur le fait que le pont est utilisable ou non.

Restons, dans un premier temps, dans un cadre de possibilités qualitatives. Suite aux évaluations des experts sur la capacité de notre pont à résister au séisme qui s'est produit, la distribution de possibilité est *a priori* :

		pont utilisable		pont inutilisable	
ID	type	Π (parfait état)	Π (fonction. réduite)	Π (non menace écroulement)	Π (menace écroulement)
1	pont	0,8	1	0,6	0,4

Tableau III.3.10

Les experts considèrent donc qu'il est parfaitement normal que le pont soit utilisable avec une fonctionnalité réduite et qu'ils seraient très surpris que le pont menace de s'effondrer.

Le témoignage, depuis le terrain, que le pont serait inutilisable avec la certitude α=0,8 reviendrait à utiliser le conditionnement de l'équation (13) pour calculer π(ω │ {(utilisable, 0,2), (inutilisable, 1}), où ω serait à tour de rôle un des quatre mondes possibles renseignés dans le SIG.

Pour le cas du pont en parfait état, on aurait ainsi :

Π(parfait état | {(utilisable, 0,2), (inutilisable, 1)}) =
max (min(0,2, π(parfait état | utilisable)), min(1, π(parfait état | inutilisable))) =
max (min(0,2, 0,8), min(1, 0)) =0,2

Les possibilités conditionnelles pour les trois autres modalités peuvent être calculées de la même manière aboutissant à la nouvelle table attributaire avec les valeurs de possibilité *a posteriori* :

		pont utilisable		pont inutilisable	
ID	type	Π (parfait état)	Π (fonction. réduite)	Π (non menace écroulement)	Π (menace écroulement)
1	pont	0,2	0,2	1	0,4

Tableau III.3.11

L'évènement normal et complètement possible est maintenant l'état du pont inutilisable qui ne menace pas de s'écrouler, car il correspond à l'état le moins surprenant en accord avec l'évidence empirique. Les deux états correspondant au pont utilisable (le parfait état et la fonctionnalité réduite) deviennent très surprenants : leur possibilité correspond à l'incertitude résiduelle de l'évidence empirique. L'état de menace d'écroulement est le second évènement en ordre de possibilité. L'évaluation des plausibilités des états du pont doit effectivement s'effectuer avec une logique strictement ordinale, car la théorie des possibilités qualitatives n'attache ici pas de signification particulière aux valeurs numériques des possibilités.

Dans un cadre de possibilités quantitatives, en revanche, les experts seraient capables d'étayer les possibilités du Tableau III.3.10 par des éléments statistiques. Dans l'hypothèse (celle-ci peu réaliste) que l'observateur sur le terrain soit aussi capable de fournir une certitude α=0,8 étayée par des considérations statistiques (comme les vraisemblances dans la révision probabiliste), on pourrait alors employer l'équation (11) au sein de (13).

Pour le cas du pont menaçant de s'effondrer on aurait, par exemple :

Π(menace écroulement | {(utilisable, 0,2), (inutilisable, 1)}) =
max (0,2 x π(menace écroulement | utilisable)), 1 x π(menace écroulement | inutilisable))) = max ((0,2 x 0), (1 x (0,4/0,6))) = 0,67

Procédant de la même manière pour les autres mondes possibles, la nouvelle table attributaire avec les valeurs de possibilité *a posteriori* sera :

		pont utilisable		pont inutilisable	

ID	type	Π (parfait état)	Π (fonction. réduite)	Π (non menace écroulement)	Π (menace écroulement)
1	pont	0,16	0,2	1	0,67

Tableau III.3.12

Le conditionnement possibiliste quantitatif nous autorise une interprétation des différences et des rapports des mesures de possibilité. On peut ainsi apprécier la toute petite différence entre les niveaux de surprise des deux mondes possibles qui sont en contradiction avec le témoignage de terrain et, surtout, le fait que les possibilités que le pont, non utilisable, soit à risque d'écroulement ou non, gardent le rapport 2 à 3 qu'ils avaient *a priori*.

III.3.9 Conclusions

Nous avons donc vu que la révision des qualificatifs de l'imparfait pour l'information géographique peut s'effectuer dans le cadre bien formalisé de la révision des croyances AGM de l'ingénierie des connaissances. Plus particulièrement, si un SIG est susceptible de modéliser uniquement des clauses conjonctives, son couplage avec une base plus expressive pourrait modéliser des ensembles de croyances beaucoup plus riches sur l'état de l'espace géographique.

Nous avons également présenté l'application de trois formalismes différents, avec leurs procédures de révision, pour modéliser les croyances sur les objets géographiques, lorsque leurs imperfections sont des incertitudes. Il s'agit de la théorie des probabilités avec le conditionnement bayésien, de la théorie des évidences avec la règle de combinaison de Dempster et de la théorie des possibilités, qualitatives et quantitatives, avec le conditionnement possibiliste. Ces procédures de révision peuvent aisément intégrer des éléments d'information qui sont à leur tour incertains pour parvenir à des nouveaux états de connaissance, plus ou moins incertains, sur les objets géographiques et leur positionnement dans l'espace.

Il semble évident que chaque formalisme est plus apte à être employé dans des situations différentes de connaissance. Notamment, si l'on dispose d'informations statistiques pour calibrer nos incertitudes et si l'on est confiant dans l'adéquation de ces modèles statistiques aux phénomènes étudiés, alors la modélisation des qualificatifs de l'imparfait et de leur révision aura tout l'intérêt à utiliser les probabilités bayésiennes et le conditionnement bayésien. Les probabilités bayésiennes offrent l'avantage indéniable d'une sophistication mathématique importante des modèles développés, permettant par exemple une intégration aisée dans le conditionnement de l'expérience équivalente aux croyances *a priori* et d'évidences multiples provenant du terrain. La disponibilité des informations statistiques nécessaires (notamment les vraisemblances plus encore que les probabilités *a priori*) pourrait néanmoins être un élément critique pour l’utilisation d’un cadre probabiliste.

Le couplage entre des informations statistiques (notamment sur les messages nous informant sur l’état de l’espace géographique) et des incertitudes sur l’adéquation de ces modèles statistiques aux phénomènes étudiés, trouve un formalisme adéquat dans la théorie des évidences de Dempster-Shafer. Ce formalisme offre également une bonne solution aux cas de fusion de données incertaines, où l’on accorderait la même confiance aux différentes sources. Les assignations des masses de croyance et leurs combinaisons posent néanmoins des défis calculatoires non négligeables. Elles s’effectuent ainsi sur l’ensemble des parties des mondes possibles, dont la cardinalité peut devenir extrêmement importante, dès que l’on considère les combinaisons de plusieurs évènements, qui ne seraient pas forcement binaires. Ces considérations pratiques ont eu tendance à ralentir les développements applicatifs de la théorie des évidences dans le monde de la géomatique.

Finalement, la théorie des possibilités et le conditionnement possibiliste offrent une alternative particulièrement bien adaptée aux cas où les informations géographiques dérivent uniquement d’élicitations auprès d’experts. Ici encore, on peut distinguer deux cas de figure. Si les experts sont capables d’étayer les valeurs de possibilité (non surprise) et de nécessité (certitude) par des informations statistiques, la théorie des possibilités quantitatives peut être exploitée pour obtenir des bornes inférieures et supérieures de probabilités mal connues. Les valeurs numériques des possibilités et des nécessités peuvent être révisées par des calculs très semblables au cadre bayésien et peuvent être comparées quantitativement. Si, en revanche, les experts sont capables uniquement d’ordonner les mondes possibles en termes d’un nombre limité de niveaux de possibilité/nécessité, la théorie des possibilités qualitatives fournira la représentation la plus appropriée. Le conditionnement possibiliste qualitatif permettra alors la révision des qualificatifs de l’incertain en utilisant uniquement des comparaisons entre niveaux. Moins expressive, cette modélisation sera néanmoins la seule adaptée à un cadre de forte incertitude épistémique, ce qui pourrait par ailleurs être souvent le cas en situation de gestion de crise et d’utilisation de VGI presque en temps réel, comme nous l’avons montré à l’aide du petit exemple qui nous a accompagné dans l’exposé de ce chapitre.

III.3.10 Bibliographie

[ALC 85] ALCHOURRON C., GÄRDENFORS P., MAKINSON D., « On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions », *The Journal of Symbolic Logic*, n° 50, p. 510–530, 1985.

[BOL 07] BOLSTAD W., *Introduction to Bayesian Statistics*, Second Edition, John Wiley, 2007.

[DUB 97] DUBOIS D., PRADE H., « A Synthetic View of Belief Revision with Uncertain Inputs in the Framework of Possibility Theory », *International Journal of Approximate Reasoning*, 1997(17), p. 295-324, 1997.

[GÄR 92] GÄRDENFORS P., « Belief revision: A vade-mecum », dans A. PETTOROSSI (dir.), *Meta-Programming in Logic. META 1992. Lecture Notes in Computer Science*, vol 649. Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.

[RAI 61] RAIFFA H., SCHLAIFER R., *Applied Statistical Decision Theory*, Division of Research, Graduate School of Business Administration, Harvard University, 1961.

[SEN 02] SENTZ K., FERSON S., Combination of Evidence in Dempster-Shafer Theory, Rapport technique SAND 2002-0835, Sandia National Laboratories, 2002.

[SHA 76] SHAFER G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, 1976.

[SHA 81] SHAFER G., « Jeffrey's Rule of Conditioning », *Philosophy of Science*, n°48, p. 337-362, 1981.

[WAL 91] WALLEY P., *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall, Londres, 1991.

[WES 03] WESSEL M., « Some Practical Issues in Building a Hybrid Deductive Geographic Information System with a DL-Component », *Proceedings of the 10th International Workshop on Knowledge Representation meets Databases (KRDB 2003)*, *CEUR Workshop Proceedings*, n° 79, 2003.

[WES 09] WESEL M., MÖLLER R., « Flexible Software Architectures for Ontology-Based Information Systems », *Journal of Applied Logic*, Special Issue on Emperically Sucessful Systems, n° 7(1), p. 75-99, 2009.

[YAG 87] YAGER R., « On the Dempster-Shafer Framework and New Combination Rules », *Information Sciences*, n° 41, p. 93-137, 1987.

[ZAD 86] ZADEH L., « A Simple View of the Dempster-Shafer Theory of Evidence and its Implication for the Rule of Combination », *The AI Magazine*, n° 7, p. 85-90, 1986.